INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES

Option mathématiques

Juin 1996

Troisième composition de mathématiques

Durée : 2 heures

PREAMBULE

Les deux parties sont très largement indépendantes.

Les candidats pourront admettre un résultat qu'ils n'auraient pas démontré à condition de le préciser explicitement.

Il sera tenu le plus grand compte de la rigueur et de la clarté du raisonnement.

NOTATIONS

$\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à une indeterminée et à coefficients réels. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on notera $\delta(P)$ le degré de P. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathbb{R}_n[X]$ comme l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.

$\{u_p\}$ désigne une suite donnée de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\delta(u_p) = p$.

Dans tout le problème, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Soit $(x_i)_{0 \leq i \leq n} \in [a,b]^{n+1}$ tel que $\forall i \in \{0, ..., n-1\}$, $x_i < x_{i+1}$.
Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est le polynôme d'interpolation de f pour le support $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ si et seulement si $\forall i \in \{0, ..., n\}$, $P(x_i) = f(x_i)$.

QUESTIONS PRELIMINAIRES

1) Montrer l'existence et l'unicité de P.

2) On pose :
$A = ((u_i(x_j)))_{0\leq i,j\leq n}$, matrice carrée à coefficients réels de taille $n+1$,
$F = (f(x_i))_{0\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $U(x) = (u_i(x))_{0\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Exprimer $P(x)$ en fonction de A, F et $U(x)$.

PREMIERE PARTIE

1) On suppose dans cette question et dans la question I-5 que f est de classe C^{n+1}.

Montrer que $\forall x \in [a,b]$, $\exists c \in [a,b]$ tel que :

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{0\leq i\leq n} (x - x_i)$$

où $P \in \mathbb{R}_n[X]$ désigne le polynôme d'interpolation de f pour le support $(x_i)_{0\leq i\leq n}$.

2) On définit les polynômes de Tchebycheff $\{T_p(y)\}$ par la relation de récurrence :
$T_0(y) = 1$; $T_1(y) = y$; $\forall p \geq 1$, $T_{p+1}(y) = 2yT_p(y) - T_{p-1}(y)$.
Montrer que si $y \in [-1,1]$, en posant $y = \cos\theta$, on a : $T_p(y) = \cos p\theta$;
et que si $y \geq 1$, en posant $y = \mathrm{ch}\theta$, on a : $T_p(y) = \mathrm{ch}p\theta$.

3) Soit $n \geq 1$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta(Q) = n$ et le coefficient réel en facteur de x^n dans l'expression développée de Q est égal à 1.

En considérant $(Q - 2^{1-n}T_n)$ aux points $\cos(\frac{j\pi}{n})$, $0 \leq j \leq n$, montrer que :

$$\sup_{y\in[-1,1]} |Q(y)| \geq 2^{1-n}$$

4) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\inf_{(y_i)_{0\leq i\leq n}\in[-1,1]^{n+1}} \{ \sup_{y\in[-1,1]} \prod_{0\leq i\leq n} |y - y_i| \} = 2^{-n}$$

Montrer que cette valeur est atteinte pour des valeurs de y que l'on précisera, lorsque les $(y_i)_{0\leq i\leq n}$ sont les racines du polynôme T_{n+1}.

5) Conclure que, pour un choix de $(x_i)_{0\leq i\leq n} \in [a,b]^{n+1}$ que l'on explicitera, le polynôme d'interpolation P correspondant sera tel que :

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

6) On définit la fonction ϕ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(z,p) = \frac{z^{p+1}}{2^{2p+1}(p+1)!}$$

a) Etudier, pour z fixé, la suite $\{\phi(z,p)\}$.

b) Faire un tableau des valeurs de $\phi(z,p)$ pour z prenant les valeurs 1, 5, 10, 15 et 20 et pour p prenant les valeurs 2, 6, 10, 14, 18 et 22.

SECONDE PARTIE

On suppose, dans toute cette partie, que $a = -1$, $b = 1$, $(x_i)_{0\leq i\leq n} = (\cos((\frac{2n-2i+1}{2n+2})\pi))_{0\leq i\leq n}$, $u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et pour $p \geq 1$, $u_p(x) = T_p(x)$ où $T_p(x)$ est défini à la question I-2.

On dit alors que le polynôme P défini dans le préambule est l'interpolation de Tchebycheff de f à l'ordre n.

1) Soit A la matrice définie dans la seconde question préliminaire. Montrer que, dans le cas d'une interpolation de Tchebycheff, il existe un réel strictement positif, λ, tel que λA soit une matrice orthogonale. En déduire une expression plus simple de P.

2) Calculer $\int_{-1}^{+1} T_p(x)dx$, pour tout entier naturel p.

En déduire que $\int_{-1}^{+1} P(x)dx$ s'exprime comme le produit scalaire de F et d'un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ indépendant de f, que l'on déterminera (on pourra donner l'expression de ses coefficients sous forme de sommes).

3) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^3+3x^2-2x-6}$, et comparer avec l'intégrale de l'interpolation de Tchebycheff de $\dfrac{1}{x^3+3x^2-2x-6}$ à l'ordre n, pour n variant de 2 à 5.

4) Donner des valeurs approchées de $\int_{-1}^{+1} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ en utilisant des interpolations de Tchebycheff de $e^{\frac{-x^2}{2}}$ à l'ordre n, pour n variant de 2 à 5 .